平面ベクトルの問題

19 世紀，2 次元の量や運動を表すのに **複素数** が適しているという発見は，３次元の量や運動を表す新しい数の発見へと数学者を駆り立てました。が，その道はストレートには拓かれませんでした。代わりに，はるかに高次元の量までも一般化して扱う新しい理論が提起され，その有用性が現代数学，現代物理学とともに明らかになってきたのです。ベクトルはこうして生まれました。19 世紀後半のことです。

ベクトル (vector) は vehicle (乗り物) と同じ語源をもつ言葉です。いまでは，数学的，物理的な概念として広く使われています。

今回は，ベクトルの問題を解いていく中で，ベクトルの魅力ある世界の一端を紹介します。

問題 平面上に点 O$(0,\ 0)$，A$(-1,\ 1)$，B$(2,\ 1)$，C$(5,\ -2)$ がある。点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の最大値を求めよ。

解1 点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x+1,\ y-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-2,\ y-1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ から，$(x+1)(x-2)+(y-1)(y-1)=0 \iff \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\dfrac{9}{4}$ …①

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(5,\ -2)$ から　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=5x-2y$

ここで，$5x-2y=k$ とおくと　$y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{k}{2}$

これを ① に代入して　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}x-\dfrac{k}{2}-1\right)^2=\dfrac{9}{4}$

展開して整理すると　$\dfrac{29}{4}x^2-\left(\dfrac{5}{2}k+6\right)x+\dfrac{k^2}{4}+k-1=0$ ……②

ここで，x の 2 次方程式 ② の判別式を D とすると

$$D=\left\{-\left(\frac{5}{2}k+6\right)\right\}^2-4\cdot\frac{29}{4}\left(\frac{k^2}{4}+k-1\right)=-k^2+k+65$$

2 次方程式 ② が実数解をもつための必要十分条件は　$D\geqq 0$

すなわち　$k^2-k-65\leqq 0$ …③　ここで，$k^2-k-65=0$ を解くと，$k=\dfrac{1\pm 3\sqrt{29}}{2}$

ゆえに，③ の解は　$\dfrac{1-3\sqrt{29}}{2}\leqq k\leqq\dfrac{1+3\sqrt{29}}{2}$

よって，$5x-2y$　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は最大値 $\dfrac{1+3\sqrt{29}}{2}$ をとる。 答

解2　（① を求めるところまでは同じ）　ゆえに，点 P は円 ① の周上にある。

$\overrightarrow{OP}=(x,\ y)$，$\overrightarrow{OC}=(5,\ -2)$ から　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=5x-2y$

ここで，$5x-2y=k$　…… ④ とおくと，④ は傾き $\dfrac{5}{2}$，y 切片 $-\dfrac{k}{2}$ の直線を表す。

$5x-2y$ の値の範囲は，直線 ④ が円 ① と共有点をもつような k の値の範囲に等しい。

円 ① の中心 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ と直線 ④ の距離を d とすると，「点と直線の距離」公式より，

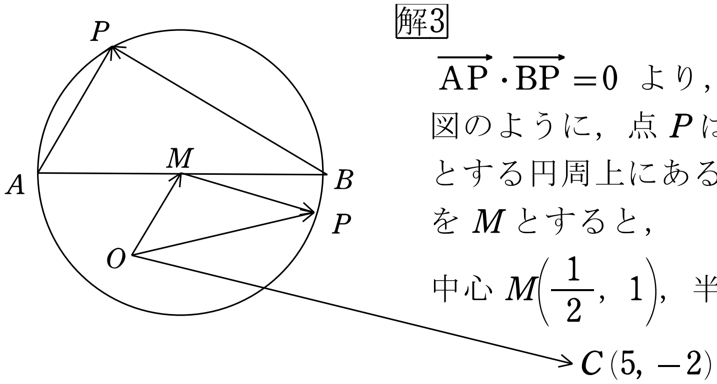
$$d=\frac{\left|5\cdot\frac{1}{2}-2\cdot1-k\right|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}=\frac{\left|k-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{29}}$$

円 ① の半径は $\dfrac{3}{2}$ であるから，円 ① と直線 ④ が共有点をもつための必要十分条件は

$$d\leqq\frac{3}{2}\qquad \text{すなわち}\qquad \frac{\left|k-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{29}}\leqq\frac{3}{2}\qquad \text{ゆえに}\qquad \left|k-\frac{1}{2}\right|\leqq\frac{3\sqrt{29}}{2}$$

よって，$-\dfrac{3\sqrt{29}}{2}\leqq k-\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{3\sqrt{29}}{2}$，各辺に $\dfrac{1}{2}$ を加えて　$\dfrac{1-3\sqrt{29}}{2}\leqq k\leqq\dfrac{1+3\sqrt{29}}{2}$

よって，$5x-2y$ すなわち $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}$ は最大値 $\dfrac{1+3\sqrt{29}}{2}$ をとる。答



解3

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ より，$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$

図のように，点 P は線分 AB を直径とする円周上にある。線分 AB の中点を M とすると，

中心 $M\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$，半径 $\dfrac{3}{2}$ の円である。

次に，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}$　であり，

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}\right)\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}+\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{OC}$$

$\overrightarrow{MP}$ は動くベクトルであるが，内積の定義より，

$$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{OC}\leqq\left|\overrightarrow{MP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|=\frac{3}{2}\times\sqrt{5^2+(-2)^2}=\frac{3\sqrt{29}}{2}$$

つまり $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}\leqq\dfrac{1+3\sqrt{29}}{2}$　答 最大値 $\dfrac{1+3\sqrt{29}}{2}$ $\left(\overrightarrow{MP}\,/\!/\,\overrightarrow{OC}\text{のとき}\right)$